ارتباط قوس‌های چندگوشهٔ متقارن با واسطهٔ توافقی

اشاره

از آنجا که هر دنباله ماهیتاً یک تابع است و تابع از مفاهیم بنیادی در دانش ریاضی محسوب می‌شود، لذا مطالعهٔ دنباله‌ها جایگاه ویژه‌ای دارد. در این میان دنباله‌های خاص مانند دنباله‌های حسابی، هندسی و توافقی و به دنبال آن واسطه‌ها مطرح می‌شوند. می‌دانیم یادگیری یک مفهوم ریاضی وقتی که بتوان برای آن تعبیری هندسی فراهم آورد، بسیار عمیق‌تر و ملموس‌تر خواهد بود (برای مثال، می‌توان تعبیر هندسی حد و مشتق را بیان کرد). لذا در این مقاله سعی شده است، از واسطهٔ توافقی بین دو عدد به کمک یک مجموعه شکل‌های هندسی که قوس‌های چندگوشهٔ متقارن نام گرفته‌اند، تعبیری هندسی فراهم آید.

نویسنده: **بروس شاویر**
مترجم: **عباس قلعه‌پور اقدم**
دبیر ریاضی از ارومیه

در کتاب درسی «ریاضی ۲» با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدیم و دیدیم که اعداد x و y را به‌ترتیب واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b می‌نامند هرگاه داشته باشیم: $x=\frac{a+b}{2}$ و $y=\sqrt{ab}$. لیکن دنبالهٔ توافقی (هم‌ساز) و به تبع آن واسطهٔ توافقی مورد بحث قرار نگرفته است. لذا چون موضوع مقاله تعبیری هندسی از واسطهٔ توافقی است، پیش از پرداختن به متن اصلی به دو تعریف می‌پردازیم:

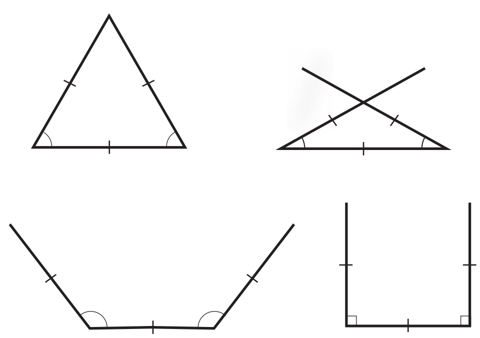
دنبالهٔ توافقی: دنباله‌ای است که معکوس جملات آن یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند؛ مانند: $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{8}$، $\frac{1}{11}$، ... .

واسطهٔ توافقی: فرض کنیم x واسطهٔ توافقی بین دو عدد a و b باشد، پس a، x و b یک دنبالهٔ توافقی و در نتیجه $\frac{1}{a},\frac{1}{x},\frac{1}{b}$ یک دنبالهٔ حسابی است که در این صورت خواهیم داشت: $x=\frac{2ab}{a+b}$. (چرا؟)

ارتباط قوس‌های چندگوشهٔ متقارن با واسطهٔ توافقی

تعریف: یک «قوس چندگوشهٔ متقارن» شکلی است متشکل از سه خط راست هم طول که زاویهٔ بین هر دو خط مجاور در آن هم‌اندازه هستند.

چند نمونه



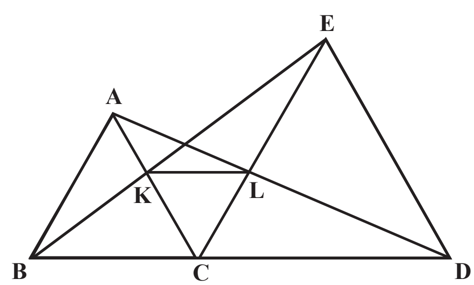
شکل ۱

یک قوس چند گوشهٔ متقارن می‌تواند بخشی از یک چندضلعی منتظم یا یک مثلث متساوی‌الاضلاع کامل باشد و این به اندازهٔ زاویه‌اش بستگی دارد.

در این مقاله قصد داریم به کمک قوس‌های چند گوشهٔ متقارن تعبیری هندسی از مفهوم واسطهٔ توافقی بیان کنیم. به‌عبارت دیگر، واسطهٔ توافقی بین دو عدد فرضی a و b را به کمک این قوس‌ها پیدا خواهیم کرد. نویسندهٔ مقاله انگیزهٔ خود را در پرداختن به این موضوع، مسئله‌ای هندسی به شمارهٔ ۲۱۴ از مجموعه مسائل «Mayhem Problem»[1] بیان می‌کند. این مسئله را به همراه راهنمای حل

ارائـه می‌کنیـم. اثبات را کامل کنیـد و در صورت نیاز با مراجعه به تارنمای «cms.math.ca/crux/» پاسخ را در دورهٔ سـی‌ودوم، شمارهٔ ششم (نوامبر ۲۰۰۶) بخش «Mayhem Solution» ببینید.

مسئله: دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و CDE روی BCD هم خط هستند. (همانند شکل ۲) اگر BE، AC را در K قطـع کند و DA، CE را در L قطع کند، ثابت کنید KL با BD موازی است.

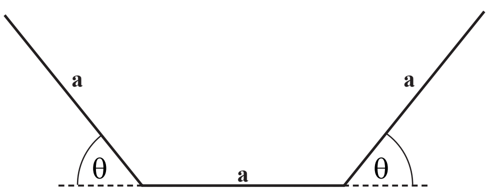


شکل ۲

راهنمای حل

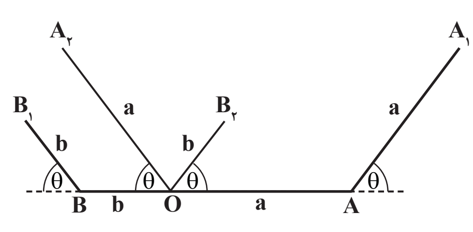
از هم‌نهشـتی مثلث‌هـای ACD و BCE برابـری زاویه‌هـای CAD و CBE، و همچنیـن از هم‌نهشـتی مثلث‌های ACL و BCK برابـری CK=CL را نتیجه بگیرید. با اثبات متسـاوی‌الاضلاع بودن مثلث CKL به جواب خواهید رسید.

برای بررسی قوس‌های سه گوشهٔ متقارن دو متغیر (پارامتر) مناسب انتخاب می‌کنیم. یکی از این دو پارامتر، زاویهٔ خارجی است که آن را θ می‌نامیم و دیگری طول سه خط سـازندهٔ قوس است که آن را a می‌نامیم. خط راسـت وسطی را پایهٔ قوس چند گوشهٔ متقارن خواهیم نامید. به شکل ۳ توجه کنید.



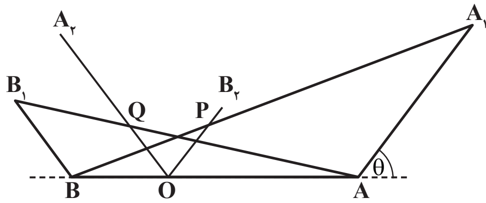
شکل ۳

حـالا فـرض کنیم بخواهیـم واسـطهٔ توافقی بین دو عـدد a و b را پیدا کنیم. مشـابه مسـئلهٔ دو مثلث متسـاوی‌الاضلاع، این بار دو قوس چند گوشـهٔ متقارن را با پارامترهای طولی متفـاوت a و b، با زاویهٔ خارجی یکسـان θ، و بـا پایه‌هایی که در یک امتداد هسـتند و پایان یکی آغاز دیگری اسـت، همانند آنچه در شکل ۴ می‌بینید، کنار هم قرار می‌دهیم.



شکل ۴

حال BA_1 را به AB_1 وصل می‌کنیم. نقطهٔ برخورد BA_1 با OB_2 را P و نقطهٔ تقاطع AB_1 و OA_2 را Q می‌نامیم.



شکل ۵

می‌توان ثابت کرد که: $OP = OQ = \frac{ab}{a+b}$. طول‌های مساوی OP و OQ در واقع نصف واسطهٔ توافقی بین دو عدد a و b هستند که به اندازهٔ θ هم بستگی ندارند. این مطلب را از دو روش متفاوت اثبات می‌کنیم، ولی برخی جزئیات اثبات را به‌عهدهٔ شما می‌گذاریم.

برهان ۱

مثلث‌های A_1AB و POB متشابه‌اند. (چرا؟) بنابراین: $\frac{OP}{OB} = \frac{AA_1}{AB}$. از طرف دیگر داریم: $A_1A=AO=a$ و $OB=b$. پس: $\frac{OP}{b} = \frac{a}{a+b}$ و در نتیجه: $OP = \frac{ab}{a+b}$.

به طریق مشابه می‌توان از تشابه مثلث‌های B_1BA و QOA برابری $OQ = \frac{ab}{a+b}$ را به‌دست آورد.

برهان ۲

این‌بار از مختصات استفاده می‌کنیم. نقطهٔ O را مبدأ یک دستگاه مختصات فرضی می‌گیریم؛ یعنی: $O=(0,0)$. در این صورت مختصات نقاط A و B به ترتیب $(a,0)$ و $(-b,0)$ خواهند بود. از طرف دیگر، چون: $AA_1=OA=a$، پس مختصات نقاط A_1 و A_2 و B_1 و B_2 به‌صورت زیر خواهند بود:

$A_1 = (a(1+\cos\theta), a\sin\theta)$

$A_2 = (-a\cos\theta, a\sin\theta)$

$B_1 = (-b(1+\cos\theta), b\sin\theta)$

$B_2 = (b\cos\theta, b\sin\theta)$

برای یافتن مختصات P معادلات خطوط BA_1 و OB_2 را پیدا می‌کنیم. سپس با تشکیل یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی مختصات نقطهٔ تقاطع این دو خط (P) را به‌دست می‌آوریم:

$$P = \left(\frac{ab\cos\theta}{a+b}, \frac{ab\sin\theta}{a+b}\right)$$

به طریق مشابه از معادلات خطوط AB_1 و OA_2 مختصات نقطهٔ Q به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Q = \left(-\frac{ab\cos\theta}{a+b}, \frac{ab\sin\theta}{a+b}\right)$$

طول خطوط OP و OQ را محاسبه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم: $OP = OQ = \frac{ab}{a+b}$.

تمرین:

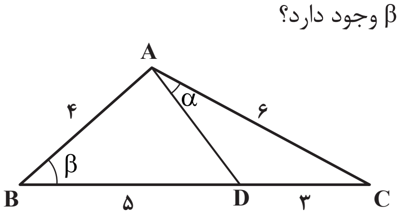
برای واسطهٔ توافقی بین دو عدد ۳ و ۷ از رابطهٔ $x = \frac{2ab}{a+b}$ مقدار ۴/۲ به‌دست می‌آید. حال دو قوس چند گوشهٔ متقارن را با یک زاویهٔ اختیاری و با طول‌های ۳ و ۷ سانتی‌متر کنار هم قرار دهید و طول پاره‌خط‌های OP و QO را اندازه بگیرید.

پرسش‌های بیکارجو!

؟

۱

در شکل مقابل، چه رابطه‌ای بین اندازه‌های α و β وجود دارد؟



الف) $\alpha+\beta=90^\circ$

ب) $\beta-\alpha=30^\circ$

ج) $\beta=2\alpha$

د) $\beta=3\alpha$

هـ) $\beta-\alpha=45^\circ$

پی‌نوشت

۱. نشریه‌ای کانادایی شامل مجموعه مسائل که از سال ۱۹۸۸ کار خود را آغاز کرد و بعدا به‌صورت بخشی از مجله Crux Mathematicorum به‌کار خود ادامه داد.

منابع

۱. یارمحمدی، احسان (۱۳۹۴). «معرفی مجلات ریاضی جهان». مجلهٔ رشد برهان ریاضی متوسطهٔ دوم. شمارهٔ ۹۰. دورهٔ ۲۵.

۲. کریمی، حسین (۱۳۹۴). «کاربردی از تشابه در واسطه‌های هندسی و توافقی». مجلهٔ رشد برهان ریاضی متوسطهٔ دوم. شمارهٔ ۹۱. دورهٔ ۲۵.

3. Shawyer, Bruce. SPAs and the Harmonic Mean. crux Mathematicorum with mathematical mayhen. V33, n1 (feb 2007)

4. mayhem problem. crux mathematicorum with mathematical mayhem. v 31. n7 (nov 2005)

5. mayhem solution. crux mathematicorum with mathematical mayhem. v 32, n 6 (nov 2006)